Linear Algebra EI

Komplexe Zahlen

$\frac{1}{i} = i^{-1} = -i \qquad i^2 = -1 \qquad \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$z \in \mathbb{C} = a + bi \qquad z = r \cdot e^{i\varphi}$

$z_0 + z_1 = (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)i$

$z_0 \cdot z_1 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = r_0 r_1 e^{i(\varphi_0 + \varphi_1)}$

$z^x = r^x \cdot e^{\varphi i \cdot x} \quad x \in \mathbb{R}$

$\frac{z_0}{z_1} = \frac{r_0}{r_1} e^{i(\varphi_0 - \varphi_1)}$

$z^* = a - ib = re^{-i\varphi}$

$r = |z| \quad \varphi = \begin{cases} +\arccos(\frac{a}{r}) : b \geq 0 \\ -\arccos(\frac{a}{r}) : b < 0 \end{cases}$

x	α	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$
0	0°	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	0	1	x
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
π	180°	-1	0	0
$\frac{7\pi}{6}$	210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{4}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	240°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	270°	0	-1	x
$\frac{5\pi}{3}$	300°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2π	360°	1	0	0

Gruppen

Halbgruppe: $(M, \circ) : M \times M \to M$
- Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Monoid Halbgruppe M mit:
- Identitätselment: $e \in M : ae = ea = a$

Kommutativ/abelsch: Halbgruppe/Monoid mit
- Kommutativgesetz; $a \cdot b = b \cdot a$

Gruppe: Monoid mit
- Inverse: $\forall a \in G : \exists\ aa^{-1} = a^{-1}a = e$
- Eindeutig Lösung für Gleichungen

Zusatz:
- Inverseregel: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Untergruppe:
- Gruppe: $(G, \cdot), U \subset G$
- $a, b \in U \Leftrightarrow a \cdot b \in U$
- $a \in U \Leftrightarrow a^{-1} \in U$
- $e \in U$ (Neutrales Element)

Direktes Produkt:
$(G_1, \cdot_1) \times (G_2, \cdot_2) \times \ldots$
$(a_1, b_1, \ldots)(a_2, b_2, \ldots) = (a_1 \cdot_1 b_1, a_2 \cdot_2 b_2, \ldots)$

Ring: (auch Schiefkörper) Menge R mit:
- $(R, +)$ kommutativ Gruppe
- $(R, \cdot)$ Halbgruppe
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (a \cdot b)$ (Distributiv Gesetz)

Körper: Menge K mit:
- $(K, +), (K \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutativ Gruppe
  (0 ist Neutrales Element von $+$)
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (a \cdot b)$ (Distributiv Gesetz)

Beweiß durch Überprüfung der Eigneschaften

Vektorräume (VR)

$(V, \oplus, \odot)$ ist ein über Körper K
- $+ : V \times V \to V, (v, w) \to v + w$
- $\cdot : K \times V \to V, (\lambda, v) \to \lambda v$

Es gilt: $\lambda, \mu \in K, \ v, w \in V$
- $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \lambda\mu$
- $1v = v, \vec{0} \in V$

Bsp: $\mathbb{K}^n$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$

Untervektorraum: $U \subset V$
$v, w \in U, \lambda \in K$
$\Leftrightarrow v + w \in U, \vec{0} \in U$ UND $\lambda v \in U$
- $(U \cap W) \subset V$

Basis und Dim

Linear Abbildung: $\Phi : V \to V$
- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(\lambda v + w) = \lambda\Phi(v) + \Phi(w)$
- Menge aller linearen Abbildung: $L(V, W)$

Basis:
linear unabhänige Menge B an $v \in V$, sodass $\mathrm{spann}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{spann}(V)$
- B ist Erzeugerssystem von V
- Endliche Erzeugerssystem: $|B_1| = |B_2| \ldots$

Linear unabhänige: Linearkombintation in welcher $\lambda_0 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ die EINZIEGE Lösung für $\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_1 v_1 = 0$

Basisergänzungssatz:
Sei $\{v_1, \ldots v_n\}$ lin. unabhänig und M kein Basis. Dann $\exists v_{n+1}$ sodass $\{v_1, \ldots v_n, v_{n+1}\}$ lin unabhänig (aber evt. eine Basis ist)

Dimension: $\dim V = \#$Vektoren der Basis
- $\dim V = \infty$, wenn V nicht endlich erzeugt ist

Abbildungen

$f(x) = y, f : A \to B$

Injectiv (Monomorphismus):
one to one
$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Surjectiv (Epimorhismis):
Output space covereed
- Zeigen das $f(f^{-1}(x)) = x$ für $x \in \mathbb{D}$
- $\forall x \in B : \exists x \in A : f(x) = y$

NICHT surjektiv wenn $|a| < |b|$

Bijektiv (Isomorphismus):
Injectiv und Surjectiv
- In einer Gruppe ist $f(x) = xc$ für $c, x \in G$ bijektiv
- isomorph: V, W VRs, f bijektiv $f(V) = W \Rightarrow V \cong W$

Beweiß durch Wiederspruch
für Gegenbeweiß

Endomorphismus: $A \to B$ mit $A, B \subseteq C$

Automorphismus: Endomorphismus und Bijektiv (Isomorphismus)

Vektorraum-Homomorphismus: linear Abbildung zwischen VR

Spann und Bild

Spann:
- Vektorraum $V : \mathrm{spann}(V) = \bigcap\limits_{M \subset V} U$
- $B : \mathrm{spann}(U) = \{\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_n v_n, \lambda_0, \ldots \lambda_n \in K\}$
- $\mathrm{spann}(\Phi(M)) = \Phi(\mathrm{spann}(M))$

Urbild: $f^{-1}(I \subset B) \subseteq A$

Bild: Wertemenge $\mathbb{W}$
- $f(I \subset A) = B$ (Oft $I = A$)
- Basis $B : \mathrm{spann}(B)$
- $\mathrm{Bild}\,\Phi := \{\Phi \in W \mid v \in V\}$

Nullraum/Kern:
$\mathrm{Kern}\,\Phi := \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$

Rang $\mathrm{Rang}\, f := \dim \mathrm{Bild}\, f$

Dimensionssatz: Sei A lineare Abbildung
$\dim(V) = \dim(\mathrm{kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A))$
$\dim(V) = \dim(\mathrm{kern}(A)) + \mathrm{Rang}(A)$
$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(A))$ oder $\dim(\mathrm{kern}(A)) = 0$
$\Leftrightarrow A$ bijektiv $\Leftrightarrow$ invertierbar

Determinate und Bilinearform

Eukldische Vektorräume

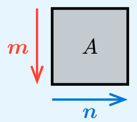
Unitair Vektorräume

Matrix Typen

m Zeilen n Splate

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



Einheits Matrix I, E	
Diagonalmatrix Σ, D	Nur Einträger auf Hauptdiagonalen $\det(D) = d_{00} \cdot d_{11} \cdot d_{22} \cdot \ldots$
Symetrisch S	$S = S^T, S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $AA^T, A^T A$ ist symetrisch S immer diagonaliserbar EW immer $\in \mathbb{R}$, EV orthogonal
Invertierbar	$\exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = E$ **Invertierbar wenn:** A bijektiv, $\det(A) = 0$

	Spalten Vekoren lin. unabhänig $\det(A) = 0$ **Nicht Invertierbar wenn:** $\exists$ EW $\neq 0 \Rightarrow \neg$ invertierbar Keine Qudratische Matrix
Orthogonal O	$O^T = O^{-1}$ $\langle Ov, Ow \rangle = \langle v, w \rangle$
Unitair	$V^*)$
Diagonaliserbar	$\exists A = BDB^{-1}$, D diagonal, B: Splaten sind EV von A • Selbst-Adujunkte diagonalisierbar • Symetrisch Matrix • $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ AND $\mathrm{alg}(\lambda) = \mathrm{geo}(\lambda)$
postiv-semi-definit	$\forall$ EW ≥ 0

Eigenwert und Eigenvektoren

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: n Complexe Eigenwerte
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Eigentwete bestimmen

$Av = \lambda v \Rightarrow \det(A - E\lambda) = 0$

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_{11} - \lambda_1 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} - \lambda_2 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} - \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow \chi_A = (\lambda_0 - \lambda)^{n_0} \cdot (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \dots$

$\lambda_0, \lambda_1, \dots =$ Nst von χ_A

2. Eigenvektor bestimmen

$\mathrm{Eig}(\lambda_k) = \mathrm{kern}(A - \lambda_k E)$

$$\begin{pmatrix} x_{11} - \lambda_k & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} - \lambda_k & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} - \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algebrasche Vielfacheit: $\mathrm{alg}(\lambda) = n_0 + n_1 + \dots$
Geometrische Vielfacheit: $\mathrm{geo}(\lambda) = \dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$

$1 \leq \mathrm{geo}(\lambda) \leq \mathrm{alg}(\lambda)$

Gram-Schmit ONB

Diagonalisierung

$A = RDR^{-1}$

Rezept Diagonalisierung

1. EW bestimmen: $\det(A - \lambda I) = 0$
   $\Rightarrow \chi_A = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots$
2. EV bestimmen: $\mathrm{spann}(\mathrm{kern}(A - \lambda_i I))$: $r_0, r_1, \dots$
3.

Diagnoalmatrix: D
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Basiswechselmatrix: R
$$\begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ r_0 & r_1 & \dots & r_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

Schur-Zerlegung

immer anwendbar;

SVD

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zerlegbar in $A = LSR^T$

$L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Orthogonal
$S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Diagonal
$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Orthogonal

1. AA^T berechnen $AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$
2. AA^T diagonalisieren in R, D
3. Singulärwere berechen: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
4. $l_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_{\lambda i}$ $\quad L = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ l_0 & l_1 & \dots & l_m \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$
   (Evt. zu ONB ergenze mit Gram-Schmit/ Kreuzprodukt)
5. $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (wie A):
   $S = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Matrix Normen

$\| \cdot \|_M$ Matrix Norm, $\| \cdot \|_V$ Vektornorm

Generisch Vektor Norm: $\| \ v \ \|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^p}$

- submultiplikativ: $\|AB\|_{\mathrm{M}} \leq \|A\| \|B\|$
- verträglich mit einer Vektornorm: $\|Av\|_{\mathrm{V}} \leq \|A\|_{\mathrm{M}} \ \|v\|_{\mathrm{V}}$

Frobenius-Norm $\|A\|_{\mathrm{M}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{mn}^2}$

Induzierte Norm $\|A\|_{\mathrm{M}} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_V}{\|v\|_V}$
$= \sup_{\|v\| = 1} \frac{\|Av\|_V}{\|v\|_V}$
- submultiplikativ
- verträglich mit einer Vektornorm $\| \cdot \|_V$

maximale Spaltensumme $\|A\|_r = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_j|$

Rekursive Folgen

E.g: $a_1 x_{n-1} + a_2 x_n = x_{n+1}$

1. Als Matrix Schreiben $F : \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$
   $F s_{n-1} = s_n$
2. Diagonaliseren: $F = RDR^{-1}$
3. Wiederholte Anwendung: $F^n = RD^n R^{-1}$

Differenzialgleichungen