Analysis 1 (IE)

Allgemeins

Dreiecksungleichung	$\lvert x+y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ $\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \rvert \le \lvert x-y\rvert$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung	$\lvert x \cdot y\rvert \le \lvert \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert \rvert$
Geometrische Summenformel	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Bernoulli-Ungleichung	$(1+a)^n x \in \mathbb{R} \ge 1 + na$
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Binomische Formel	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Fakultäten	$0! = 1! = 1$
Gausklammer	$\lfloor x \rfloor = \operatorname{floor}(x)$ $\lceil x \rceil = \operatorname{ceil}(x)$
Bekannte Werte	$e \approx 2.71828\ (2 < e < 3)$ $\pi \approx 3.14159\ (3 < \pi < 4)$

Trigonometrie

$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad \sin(-x) = -\sin(x)$

Subsitution mit Hilfsvariable

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$\tan(x) = -\cot(x + \frac{\pi}{2})$ $\quad \cot(x) = -\tan(x + \frac{\pi}{2})$

$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ $\quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y)$

Für $x \in [-1, 1]$
$\arcsin(x) = -\arccos(x) - \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x) = -\arcsin(x) + \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$

Folgen

$$\lim_{x\to\infty} a_n$$

Beschränkt: $\exists k \in \mathbb{R}$ sodass $\lvert a_n\rvert \le k$
- Beweiße: durch Induktion
- Beweiße: Hat min. ein konvergent Teilefolge
- (Beweiße: Ungleichung $\lvert a_n\rvert \le k$)

Monoton fallend/steigended
- Beweise: Induktion

Fallend	**Steigend**
$a_{n+1} \le a_n$	$a_{n+1} \ge a_n$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

Konvergentz Allgemein

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass
- Konvergent $\to a$: $a_n \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$
- Divergent $\to \infty$: $a_n \in [\varepsilon, \infty)$
- Divergent $\to \infty$: $a_n \in (-\infty, \varepsilon)$

$\forall n > n_\varepsilon$

Konvergentz Häufungspunkte
- $a_n \to a \Leftrightarrow$ Alle Teilfolgen $\to a$

Konvergenz Beweißen
- Monoton UND Beschränkt $\Rightarrow$ Konvergenz NICHT Umgekehert
- (Cauchyfolge
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass
  $\forall m, n \ge n_\varepsilon : \lvert a_n - a_m\rvert < \varepsilon$
  Cauchyfolge $\Rightarrow$ Konvergenz)
- a_n unbeschränkt $\Rightarrow$ divergenz

Konvergent Grenzwert finden
- Von Bekannten Ausdrücken aufbauen
- Fixpunk Gleichung: $a = f(a)$
  für rekusive $a_{n+1} = f(a_n)$ (Zu erst machen!)
- Bernoulli-Ungleichung Folgen der Art $(a_n)^n$:
  $(1+a)^n \ge 1 + na$
- Sandwitchtheorem:
  $b_n \to x$: $a_n \le b_n \le c_n$, wenn $a_n \to x$ und $c_n \to x$
  $b_n \to -\infty$: $b_n \le c_n$, wenn $c_n \to -\infty$
  $b_n \to +\infty$: $c_n \le b_n$, wenn $a_n \to +\infty$
- Zwerlegen in Konvergente Teil folgen
  (Vorallem bei $(-1)^n \cdot a_n$)

Konvergent Folge Regeln

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ $\qquad$ für $(b \ne 0)$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = \lvert a\rvert$

$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$

Bekannte Folgen

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} k = k, k \in \mathbb{R}$

$\exp(x) = e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Teilfolgen

$$a_k \subset a_n \text{ (z.B } k = 2n+1)$$

- Index muss streng monoton steigen!
- Beschränkte $a_n \Rightarrow$ min eine konvergente a_k
- Konvergenz-Werte von a_k sind Häufungspunkte
- Wenn alle a_k gegen genau eine Häufungspunk konverigiert $\Leftrightarrow a_n$ konvergent

Reihen

$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverigiert NICHT

- **Absolute Konvergenz**
  $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n\rvert = a \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent
- **Partialsummen**
  ALLE Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} \lvert a\rvert$ beschränkt
  $\Rightarrow$ *Absolute Konvergent*
- **(Cauchy-Kriterium)**
  konvergent wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$
  sodass $\lvert s_n - s_m\rvert = \left\lvert \sum_{k=m+1}^{n} \right\rvert < \varepsilon$
  $\forall n_\varepsilon < m < n$
- **Leibnitzkriterium**
  Alternierend + Nullfolge
  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konvergent
- **Vergleichskriterium**
  $a_n, b_n : \lvert a_n\rvert \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N} > N_0, N_0 \in \mathbb{N}$
  1. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\rvert$ konvergent
     Suche b_n für Konvergenz
  2. $\sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\rvert$ divergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent
     Suche $\lvert a_n\rvert$ für Divergenz

  Nützlich:
  - Dreiecksungleichung
  - $\forall\ n > N_0 \in \mathbb{N}\ \exists k, q \in \mathbb{R}$
    sodass $q > 1$: $n^k \le q^n$ (Potenz stärker Polynom)
- **Quotientenkriterium und Wurzelkriterium**
  1. $\rho = \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert$
  2. $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_{n+1}\rvert}$

  divergent: $\rho > 1$, keine Aussage $\rho = 1$, konvergent $\rho < 1$
- **Geometrische Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$
  - konvergent $\lvert q\rvert < 1$, divergent $\lvert q\rvert \ge 1$
  - Grenzwert: (Muss $n = 0$) $= \frac{1}{1-q}$
- **Harmonische Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$
- **Reihendarstellungen**
  1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
  2. $\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$
  3. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$
  4. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$

Potenzreihen

Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, stetig auf $x \in [a, b]$

- **Zwischenwertsatz**
  $\Rightarrow \forall y \in [f(a), f(b)] \exists$ min. ein $x \in [a, b] : f(x) = y$
  Beweiß für mindest. n Nst
- **Satze von Rolle**
  diffbar $x \in (a, b)$
  $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists$ min. ein $x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$
  Beweiß für max. n Nst, durchWiederspruchsbweiß mit $f(a) = f(b) = 0$ und Wiederholte Ableitung
- **Mittelwertsatz** diffbar $x \in (a, b)$
  $\Rightarrow \exists x_0 : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$
- **Monotonie**
  $x \in I : f'(x) < 0$: Streng monoton steigended
  $x_0, x_1 \in I, x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$
  (Analog bei (streng) steigned/fallended)

Stetigkeit

Allgemein

$f(x)$ ist stetig wenn:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

$x \in \mathbb{D}$ Beachten! Definitionslücken $\neq$ unstätig
Definition gilt auch für $I \subset \mathbb{R}$

Regeln

$f(x), g(x)$ seinen stetig dann sind auch Stetig:

$f(x) + g(x)$ $\quad f \circ g$ $\quad \alpha \cdot f(x)$ $\quad \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad f(x) \cdot g(x)$

Bekannte Funktion

Stetig	**Nicht Stetig**
• Polynome, gebrochen Rationale Fn • $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ • Betrags Funktion • sin, cos, tan	• Stufenfunktion • Fall Unterscheidungen • $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$ für $x \in \mathbb{R}$

Ableitung

Differenzierbarkeit

- $f(x)$ ist an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ diffbar wenn

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 \pm} \left(\frac{f(x_0 + h - f(x_0))}{h} \right)$$

- $f(x)$ diffbar $\Rightarrow f(x)$ stetig
- Tangente an x_0: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
  - Beste linear Annäherung
  - Tangente $t(x)$ von $f(x)$ an der Stelle x_0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

Ableitung Regeln

$f(x) + g(x) : f'(x) + g'(x)$

$f(x) \cdot g(x) : f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)} : \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$f(x) = c : f'(x) = 0$ $\qquad c \cdot f(x) : c \cdot f'(x)$

$(x^{-n}) n \in \mathbb{N} : n x^{n-1}$ $\qquad e^x : e^x$

- Kettenregel: $f(g(x)) : f'(g(x)) \cdot g'(x)$

,

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+x} x^{q+1}$	x^q	$q x^{q-1}$
$\ln\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$x \ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{2}{3}\sqrt{ax^3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln\lvert 1 + x^2 \rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2} \ln\lvert 1 + x^2 \rvert$	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$x \operatorname{arsinH}(x) + \sqrt{1 + x^2}$	$\operatorname{arsinH}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$x \operatorname{arcosH}(x) + \sqrt{1 + x^2}$	$\operatorname{arcosH}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$x \operatorname{artanH}(x) + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$	$\operatorname{artanH}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$