Trig Identitäten

$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad \sin(-x) = -\sin(x)$

Subsitution mit Hilfsvariable

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$\tan(x) = -\cot(x + \frac{\pi}{2})$ $\quad \cot(x) = -\tan(x + \frac{\pi}{2})$

$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ $\quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y)$

Für $x \in [-1, 1]$
$\arcsin(x) = -\arccos(x) - \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x) = -\arcsin(x) + \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$

x	deg	cos(x)	sin(x)
0	$0°$	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	0	1
$\frac{2}{3}\pi$	$120°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$135°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$150°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	$180°$	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	$270°$	0	-1
2π	$360°$	1	0

Folgen

$$\lim_{x\to\infty} a_n$$

- **Beschränkt**: $\exists k \in \mathbb{R}$ so dass $|a_n| \leq k$
  - ε-Interval: $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$
  - **Beweiß:** Induktion
  - Hat min. eine konvergent Teilfolge
- **Monoton: steigen/fallend** $a_{n+1} \gtreqless a_n$
  - **Beweisen:** Induktion mit $a_{n+1} \gtreqless a_n$ oder $\frac{a_{n+1}}{a_n} \gtrless 1$ oder Umformung
- **Konvergent**:
  - Es gibt $\forall \varepsilon > 0$ eine Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > n_\varepsilon$
  - Divergent $\to \infty$, wenn $\forall k \in \mathbb{R} : \exists\, a_n > k$
  - Divergent $\to -\infty$, wenn $\forall k \in \mathbb{R} : \exists\, a_n < k$
  - Genzwert is eindeutig
- **Konvergenz $a_n \to a \Leftrightarrow$ beschränkt UND monoton**
  - $\Leftrightarrow$ Alle Teilefolgen konvergent zu a
  - Wenn Häufungspunkt $\neq \Rightarrow$ divergent
  - Sandwitch-Theorem
- **Cauchyfolge** Ein folge die diese Eigenschaft hat: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$
  Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ Konvergenz

Grenzwert Finden:

- "Bottom up" von Bekannten Ausdrücken
- Fixpunk Gleösenichung l $a = f(a)$ für $f(a_n)$
- Bernoulli-Ungleichung für $(a_n)^n$
  $(1+a)^n \geq 1 + na$ für $a \geq -1$
- $1 + u \leq \frac{1}{1-u}, u < 1$

Für Konvergent Folgen:

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ $\quad \lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$

Spezifische Folgen

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} k = k, k \in \mathbb{R}$

$\exp(x) = e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Teilfolgen

- Indizies müssen immer streng monoton wachsend sein. (z.B. is a_1, a_1, a_2, a_2 KEIN Teilfolge von a_n)
- Beschränkte $a_n \Rightarrow$ **min eine** konvergent Teilfolge
- Konvergent $a_n \Rightarrow$ **genau ein** Häufungspunkt

Reihen

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverigiert $\Rightarrow a_n$ Nullfolge
Wenn a_n keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}$ divergent

Absolute Konvergenz

Bedeuted $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = a \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ beschränkt + (monoto steigended) $= \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$

Partialsummen

Sind die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty}|a|$ beschränkt
$\Longrightarrow$ *Absolute Konvergent*

Cauchy-Kriterium

konvergent wenn $\forall \varepsilon$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$
sodass $|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}\right| < \varepsilon$
$\forall n_\varepsilon < m < n$

Leibnitzkriterium

Wenn monton fallend, $a_n \geq 0$, Null folge dann

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ konvergent

Majorandenkriterium

Seien a_n, b_n mit $|a_n| \leq b_n$ $(\forall n > N, N \in \mathbb{N})$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ konvergent
   Suche b_n für Konvergenz
2. $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ divergent $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent
   Suche $|a_n|$ für Divergenz

Nützlich:

- Dreiecksungleichung
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$
  $\exists\ k, q \in \mathbb{R}$
  für $q > 1$: $n^k \leq q^n$ ab einem bestimmten.

Quotientenkriterium und Wurzelkriterium

1. $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
2. $\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}$
   (Stärker, am besten für $(\ldots)^n$)

divergent: $\rho > 1$, keine Aussage $\rho = 1$, konvergent $\rho < 1$

Spezifische Reihen

Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

- konvergent $|q| < 1$, divergent $|q| \geq 1$
- Grenzwert: (Muss $n = 0$) $= \frac{1}{1-q}$

Harmonische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
2. $\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}$
3. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$
4. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$

Kriterien Übersich für Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Notwendinge Kriterien
($\neg$ Bedingung $\Rightarrow$ div.)

- Cauchy-Kriterium
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Konvergenz der Partialsummen
- Beschränktheit der Partialsummen

Hinreichende Kriterien
(Bedingung $\Rightarrow$ konv.)

- Absolute Konvergenz
- Leibnitz-Kroterium
- Beschränktheit der Partialsummen
- Quotienten-/Wurzel-kriterium
- Majorandenkriterium

Funktionen

Stetigkeit

Stetig an der stelle x_0 wenn:

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$$

$f(x)$ muss nicht definiert sein an x_0

Differenzierbar

An der stelle x_0 wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = f'(x)$$

definiert ist