Linear Algebra EI

Notation

Gruppen

Halbgruppe: $(M, \circ) : M \times M \to M$
- Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Monoid Halbgruppe M mit:
- Identitätselment: $e \in M : ae = ea = a$

Kommutativ/abelsch: Halbgruppe/ Monoid mit
- Kommutativgesetz; $a \cdot b = b \cdot a$

Gruppe: Monoid mit
- Inverse: $\forall a \in G : \exists\ aa^{-1} = a^{-1}a = e$
- Eindeutig Lösung für Gleichungen

Zusatz:
- Inverseregel: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Untergruppe:
- Gruppe: $(G, \cdot), U \subset G$
- $a, b \in U \Leftrightarrow a \cdot b \in U$
- $a \in U \Leftrightarrow a^{-1} \in U$
- $e \in U$ (Neutrales Element)

Direktes Produkt:
$(G_1, \cdot_1) \times (G_2, \cdot_2) \times \dots$
$(a_1, b_1, \dots)(a_2, b_2, \dots) = (a_1 \cdot_1 b_1, a_2 \cdot_2 b_2, \dots)$

Ring: (auch Schiefkörper) Menge R mit:
- $(R, +)$ kommutativ Gruppe
- $(R, \cdot)$ Halbgruppe
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (a \cdot b)$ (Distributiv Gesetz)

Körper: Menge K mit:
- $(K, +), (K \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutativ Gruppe (0 ist Neutrales Element von $+$)
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (a \cdot b)$ (Distributiv Gesetz)

Beweiß durch Überprüfung der Eigneschaften

Vektorräume (VR)

$(V, \oplus, \odot)$ ist ein über Körper K
- $+ : V \times V \to V, (v, w) \to v + w$
- $\cdot : K \times V \to V, (\lambda, v) \to \lambda v$

Es gilt: $\lambda, \mu \in K,\ \ v, w \in V$
- $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \lambda\mu$
- $1v = v, \vec{0} \in V$

Bsp: $\mathbb{K}^n$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$

Untervektorraum: $U \subset V$
$v, w \in U, \lambda \in K$
$\Leftrightarrow v + w \in U, \vec{0} \in U$ UND $\lambda v \in U$
- $(U \cap W) \subset V$

Basis und Dim

Linear Abbildung: $\Phi : V \to V$
- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(\lambda v + w) = \lambda\Phi(v) + \Phi(w)$
- Menge aller linearen Abbildung: $L(V, W)$

Basis:
linear unabhänige Menge B an $v \in V$, sodass $\text{spann}(v_1, \dots, v_n) = \text{spann}(V)$
- B ist Erzeugerssystem von V
- Endliche Erzeugerssystem: $|B_1| = |B_2| \dots$

Linear unabhänige: Linearkombintation in welcher $\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ die EINZIEGE Lösung für $\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_1 v_1 = 0$

Basisergänzungssatz:
Sei $\{v_1, \dots v_n\}$ lin. unabhänig und M kein Basis. Dann $\exists v_{n+1}$ sodass $\{v_1, \dots v_n, v_{n+1}\}$ lin unabhänig (aber evt. eine Basis ist)

Dimension: $\dim V = \#$Vektoren der Basis
- $\dim V = \infty$, wenn V nicht endlich erzeugt ist

Abbildungen

$f(x) = y, f : A \to B$

Injectiv (Monomorphismus):
one to one
$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Surjectiv (Epimorhismis):
Output space coverered
- Zeigen das $f(f^{-1}(x)) = x$ für $x \in \mathbb{D}$
- $\forall x \in B : \exists x \in A : f(x) = y$

NICHT surjektiv wenn $|a| < |b|$

Bijektiv (Isomorphismus):
Injectiv und Surjectiv
- In einer Gruppe ist $f(x) = xc$ für $c, x \in G$ bijektiv
- isomorph: V, W VRs, f bijektiv $f(V) = W \Rightarrow V \cong W$

Beweiß durch Wiederspruch
für Gegenbeweiß

Endomorphismus: $A \to B$ mit $A, B \subseteq C$

Automorphismus: Endomorphismus und Bijektiv (Isomorphismus)

Vektorraum-Homomorphismus: linear Abbildung zwischen VR

Spann und Bild

Spann:
- Vektorraum $V : \text{spann}(V) = \bigcap\limits_{M \subset V} U$
- $B : \text{spann}(U) = \{\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n, \lambda_0, \dots \lambda_n \in K\}$
- $\text{spann}(\Phi(M)) = \Phi(\text{spann}(M))$

Urbild: $f^{-1}(I \subset B) \subseteq A$

Bild: Wertemenge $\mathbb{W}$
- $f(I \subset A) = B$ (Oft $I = A$)
- Basis $B : \text{spann}(B)$
- Bild $\Phi := \{\Phi \in W \mid v \in V\}$

Nullraum/Kern:
Kern $\Phi := \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$

Rang Rang $f := \dim$ Bild f